Методическая разработка по теме: «Решение задач на нахождение наибольшего или наименьшего значения»

учителя математики: Толкуновой С.С.

Рассматривая эту тему, я брала во внимание то обстоятельство, что каждая задача должна быть интересной прежде всего с геометрической точки зрения (акцент делается на конструирование модели и ее интерпретацию).

Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений геометрических величин следует решать по плану:

1. Проанализировав условие задачи, определяют, что является оптимизируемой величиной (т.е. величиной, наибольшее или наименьшее значение которой требуется найти); обозначают оптимизируемую величину буквой у (или S, R, r и т.д. в зависимости от условия задачи).
2. Одну из неизвестных величин (сторону, угол и т.д.) принимают буквой х, устанавливают реальные (в соответствии с условием задачи) границы изменения х.
3. Исходя из условия задачи выражают у через х и известные величины (этап геометрического решения задачи), т.е. получают функцию $y = f(x)$.
4. Для функции $y = f(x)$ находят наибольшее (наименьшее) значение по промежутку реального изменения х, указанному в п.2.
5. Интерпретируют результат п.4 для решаемой геометрической задачи.

На первых трех этапах составляется, как принято говорить, математическая модель данной геометрической задачи (функция $y = f(x)$). При составлении модели успех во многом зависит от удачного выбора независимой переменной – желательно, чтобы этот выбор приводил к сравнительно несложному аналитическому выражению у через х. На четвертом этапе составленная математическая модель исследуется чаще всего средствами математического анализа, иногда элементарными способами. В момент такого исследования сама геометрическая задача, послужившая отправной точкой для математической модели, исследователя не интересует. И лишь когда закончится решение задачи в рамках составленной математической модели, полученный результат интерпретируется для исходной геометрической задачи.

Напомню план решения средствами дифференциального исчисления задачи на отыскание наибольшего или наименьшего значения функции $y = f(x)$, дифференцируемой на промежутке х:

1) находят $f'(x)$;
2) находят стационарные и критические точки для функции $f(x)$, т.е. соответственно точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует; выбирают из них те точки, которые принадлежат промежутку х;
3) составляют таблицу значений функции $y = f(x)$; в эту таблицу включают значения функции в точках, найденных в п.2, а также на концах отрезка х. Если промежуток х не содержит своих концов, то в таблицу включают пределы функции $f(x)$ на его концах.

Следует иметь в виду, что бывают случаи, когда задача проще решается чисто геометрическим путем.

Пример. Через точку М, лежащую внутри заданного угла, проводятся различные прямые. Найдите ту из них, которая отсекает от сторон угла треугольник наименьшей площади.

Решение. 1. Рассмотрим Δ АОВ < Рисунок 1>, где АВ – секущая, проходящая через точку М; ∠АОВ = α - данный угол. Оптимизируемая величина – площадь Δ АОВ, обозначим ее S.

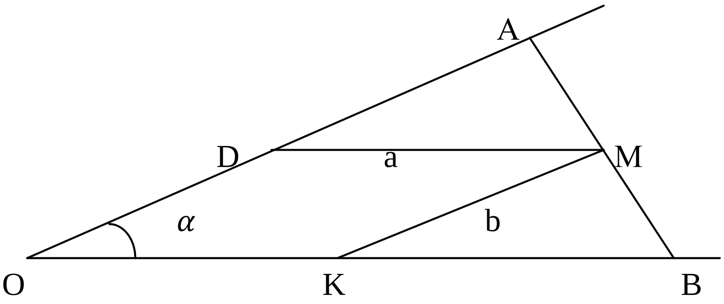

Рисунок 1.

2. Проведем DM || OB, MK || OA. Положим KB = x. Реальные границы изменения x: $0 < x < +\infty$.

3. Поскольку М – фиксированная точка, отрезки DM и KM тоже фиксированы, положим DM = a, KM = b и выразим S через x,a и b. Воспользуемся формулой S = $\frac{1}{2}$ OA· OB · sin α.

Рассмотрим ΔMKB и ΔAOB. Они подобны по двум углам. Значит,

$$\frac{MK}{AO} = \frac{KB}{OB}, \text{ т.е. } \frac{b}{AO} = \frac{x}{a+x} .$$

Отсюда находим: AO = $\frac{b(a+x)}{x}$.

Тогда S = $\frac{1}{2}$ OA· OB · sin α, S = $\frac{1}{2}\ \frac{b(a+x)}{x} \cdot (a + x) \cdot \sin\alpha = \frac{b\sin\alpha}{2} \cdot \frac{(a+x)^2}{x}$

(математическая модель задачи составлена).

4. Рассмотрим функцию S = к $\frac{(a+x)^2}{x}$, $0 < x < +\infty$, где к = $\frac{b\sin\alpha}{2}$.

Найдем ее наименьшее значение:

1) $S' = к\,\frac{2(a+x)x-(a+x)^2}{x^2} = к\,\frac{(a+x)(x-a)}{x^2}$.
2) производная не существует в точке x = 0, а обращается в нуль в точках x = - a, x = a. Из этих трех точек промежутку (0; +∞) принадлежит лишь точка x = a.
3) найдем односторонние пределы функции на концах промежутка:
   $$\lim_{x\to 0}\frac{к\,(a+x)^2}{x} = +\infty,\ \lim_{x\to +\infty}\frac{k(a+x)^2}{x} = +\infty.$$
   Значит, наименьшее значение функции достигается в единственной стационарной точке x = a.

5. Вернемся к исходной геометрической задаче. Если x = кВ = a, то, поскольку OK = a, MK – средняя линия Δ AOB. Значит, точка М – середина АВ. Таким образом, чтобы от сторон угла отсечь треугольник наименьшей площади, надо провести через точку М прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между сторонами угла, делился в точке М пополам.

Таким образом, геометрические задачи на нахождение наибольших и наименьших значений играют важнейшую роль и занимают далеко не последнее место в формировании у учащихся представлений о взаимосвязи курса геометрии с их повседневной жизнью и с другими науками. То есть у них формируется один математический язык алгебры и геометрии, что помогает лучшему усвоению этих предметов в школе.