

## 6-7 сыныптарға арналған олимпиадалық есептер

### №1

Калькуляторды қолданбай 40 секундтің ішінде анықта, қай сан артық:  
 $354 \times 357$  немесе  $355 \times 356$ ?

### №2

Берілген тізбекті қандай санымен жалғастыруға болады?

0 1 2 2 4 3 6 4 8 5 ...

### №3

$x + y = xy$  теңдеуінің бүтін шешімдерін табыңдар.

### №4

Егер  $b \neq 1$  болса,  $\frac{b^2 - 5b + 4}{b^2 - 2b + 1}$  бөлшектің мәні бүтін сан бола ма?

### №5

Қай сан артық:  $7^{92}$  немесе  $8^{91}$ ?

### №6

$ABCD$  шаршысы дөңгелектің бір ширегіне іштей сызылған және  $B$  төбесі шеңбердің бойында, ал  $D$  төбесі дөңгелектің центрінде орналасқан. Егер дөңгелек радиусы 5-ке тең болса,  $AC$  диагоналының ұзындығын табыңдар.

А) 3

В) 4

В) 5

Г) 6

Д) анықталмайды.

### №7

Төрт таңбалы сан қалдықсыз 9-ға бөлінеді, ал құрамындағы үш цифрлары – 1, 2 және 3 болса, төртінші цифраны табыңдар.

### №8

Кезекте төрт адам тұр. Барри мен Мэри арасында Сара орналасқан. Мэри алдында басқа екі адам тұр, ал Джонның орны Мэридің алдында. Кезекте кім бірінші, екінші, үшінші және төртінші?

### №9

Не артық: радиусы 3-ке тең сфераның жарты ауданы немесе радиусы 3-ке тең дөңгелектің ауданы?

### №10

$\frac{a^3 + 1}{a - 1}$  бөлшектің мәні бүтін сан болатындай  $a$ -ның барлық мәндерін табыңдар.

### Жауаптары және шешімдері:

**№1**  $355 \times 356$  артық. Шешуінің бір неше тәсілі бар, мысалы көбейтіндінің екеуінің де  $356 \times 354$  өрнегіне бөліп, келесі өрнектерді салыстырамыз:  $357/356$  және  $355/354$ . Осыдан  $357/356 = 1 + 1/356$  және  $355/354 = 1 + 1/354$ , сондықтан екінші сан артық.

**№2** Жауабы: 10. Берілген тізбек екі тізбектең құрылған: 0,1,2,3,4,5 және 0,2,4,6,8.

**№3**  $x + y = xy$  теңдеуінің бүтін шешімдерін табыңдар.

**Шешуі:**  $y = xy - x \Rightarrow y = x(y - 1)$ .

Екі жағдай болу мүмкін:

1)  $y = 1$ , онда теңдеудің шешімі жоқ, себебі  $1 \neq 0$ .

2)  $y \neq 1$ , онда теңдеудің екі бөлігін  $y - 1$  өрнегіне бөліп, аламыз:

$$\frac{y}{y-1} = x \Rightarrow \frac{y-1+1}{y-1} = x \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{y-1}.$$

Соңғы теңдеудің бүтін шешімдері болады, егер  $y - 1 = \pm 1$ . Осыдан шешімдері: (0;0), (2;2) .

**№4** Жауабы: болады. Берілген өрнекті  $(b - 1)^2$  өрнегіне қысқарту керек.

**№5** Қай сан артық:  $7^{92}$  немесе  $8^{91}$ ?

**Шешуі:**  $\frac{8^{91}}{7^{92}} = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{8}{7}\right)^{91}$ .

Егер  $\left(\frac{8}{7}\right)^2 = \frac{64}{49} > 1,2$ ;  $\left(\frac{8}{7}\right)^6 = \left(\frac{64}{49}\right)^3 > 1,2^3 \Rightarrow \left(\frac{8}{7}\right)^8 > 2 \Rightarrow \left(\frac{8}{7}\right)^{24} > 8$ .

$$\left(\frac{8}{7}\right)^{91} = \left(\frac{8}{7}\right)^{24} \cdot \left(\frac{8}{7}\right)^{67} \Rightarrow \left(\frac{8}{7}\right)^{91} > 8 \cdot \left(\frac{8}{7}\right)^{67} \Rightarrow \frac{8^{91}}{7^{92}} = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{8}{7}\right)^{91} > 1 \Rightarrow 8^{91} > 7^{92}.$$

**№6** Жауабы: 5

**№7** Егер сан қалдықсыз 9-ға бөлінсе, цифрлардың қосындысы да 9-ға бөлінеді, сонда үшінші цифра 3-ке тең.

**№8** Жауабы: Бірінші – Джон, екінші – Мэри, үшінші – Сара, төртінші – Барри.

**№9** Жауабы: радиусы 3-ке тең сфераның жарты ауданы артық.

**№10** Жауабы:  $a = -1; 0; 2; 3$ .

