МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

на тему: «Методы и формы работы учителя математики при подготовке учащихся к олимпиадам»

для 5 – 9 классов.

Выполнила Лущинская Г.П.

КГУ «Сокологоровская средняя школа» 2014 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Главная задача образовательной политики - обеспечение современного качества образования на основе сохранения его фундаментальности и соответствия актуальным и перспективным потребностям личности, общества и государства.

Модернизация общеобразовательной школы предполагает ориентацию образования не только на усвоение определенной суммы знаний, но и на развитие личности, ее познавательных и созидательных способностей.

Значительно продвинулось развитие олимпиад благодаря использованию новых информационных и коммуникационных технологий (ИКТ). Так, широкую известность в школах Казахстана через Интернет получили Международный конкурс-игра «Кенгуру», «Русский медвежонок», дистанционная олимпиада, математические бои, турниры.

Несмотря на то, что современная школа накопила богатый опыт проведения кружковых занятий по математике, неразрывно связанных с подготовкой к олимпиадам, в этом направлении имеются свои проблемы, которые волнуют в настоящее время педагогическую общественность страны, о чем свидетельствуют беседы с учителями, публикации в печати.

Отметим также, что в настоящее время учителя общеобразовательных школ испытывают нехватку современной методической литературы, предназначенной для работы со способными учащимися по организации и проведению кружковых занятий, олимпиад по математике.

К началу XXI века в нашей стране появилось большое количество школ нового типа (лицеи, гимназии, колледжи и т.д.), в которых обучаются дети, проявляющие повышенный интерес к тем или иным предметам, прошедшие конкурсный отбор. В них, в основном, обучаются учащиеся с 5 класса. В школах нового типа на изучение математики отводится большее количество часов, чем в общеобразовательных школах, предметы ведутся высококвалифицированными преподавателями по специальным программам. Уровень задач, предлагаемых на математических олимпиадах, заметно выше того, что изучают учащиеся общеобразовательных школ на занятиях математических кружков. Учителя этих школ не видят перспектив участия своих учеников на математических олимпиадах города, района, региона из-за большой конкуренции с учащимися из школ нового типа. В существующей учебно-методической литературе по подготовке к олимпиадам также не в полной мере учитывается уровень подготовки учащихся общеобразовательных школ.

Учителя осуществляют подготовку учащихся к олимпиадам, опираясь на свой собственный опыт, взгляды, т.е., как правило, работа ведется на эмпирическом уровне без должной теоретической основы. Одним из наиболее сложных моментов в обучении остается вопрос: как научить учащихся решать олимпиадные задачи ?

Между тем обучение решению олимпиадных задач на раннем этапе при подготовке к олимпиадам могло бы развивать математические способности и интерес к предмету у учащихся и повышать квалификацию учителей общеобразовательной школы.

Актуальность методического пособия определяется потребностью совершенствования методики подготовки учащихся к участию в олимпиадах по математике в аспекте развития познавательного интереса и способностей учащихся к математике.

Цель методического пособия - теоретическое обоснование и разработка методических подходов к подготовке учащихся к участию в математических олимпиадах.

Исходя из цели методического пособия, были поставлены следующие **задачи**:

- Определить основные направления и требования к совершенствованию подготовки учащихся к математическим олимпиадам.
- Разработать методические подходы к обучению решению олимпиадных задач на занятиях.
- Разработать организационные формы и методы подготовки учащихся к олимпиадам по математике.

Научная новизна и теоретическая значимость методического пособия состоит в следующем:

- Определены основные направления и разработаны методические подходы к совершенствованию подготовки учащихся к олимпиадам по математике, ориентированные на развитие познавательного интереса и способностей к предмету;
- Предложен новый подход в обучении учащихся решению олимпиадных задач - поэтапное решение опорных, аналогичных, развивающих задач;
- Определены формы и методы использования средств ИКТ в процессе подготовки и проведения олимпиад.

Практическая значимость заключается в разработке:

- Методических рекомендаций по обучению решению олимпиадных задач, которые могут быть использованы учителями при подготовке учащихся к олимпиадам;
- Методических рекомендаций по использованию средств ИКТ, в частности, с помощью электронной почты и сайтов категории «Образование», которые могут найти применение во внеклассной работе, а также непосредственно в практике работы учителей.

1. ПОНЯТИЕ И СУЩНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Главная цель математического образования – интеллектуальное развитие ученика, подготовка его к современной жизни, в которой без острой конкуренции уже не обойтись. Одной из форм такой подготовки является участие в олимпиадах.

Проведение олимпиад является развитие интереса учащихся к математике, привлечение учащихся к занятиям в математических кружках. У учащихся имеется большое желание проверить свои силы, математические способности, умение решать не стандартные задачи.

Их привлекает возможность добровольного участия в соревновании, необычность всей обстановки на олимпиаде.

Для развития интереса учащихся к математике имеет значение и спортивный азарт участников олимпиады. Особенно это характерно для учащихся 5 – 7 классов. Дух соревнования заложен во многих наших школьниках, поэтому они желают посоревноваться со своими товарищами и в умении решать олимпиадные задачи. В старших классах, на более высоких ступенях олимпиад, спортивные соображения играют меньшую роль, но игнорировать их совсем не следует.

Олимпиады способствуют выявлению и развитию математических способностей учащихся. Часто на уроках ученик получает, и вполне объективно, только тройки, изредка четверки и двойки. Приходит на школьную олимпиаду попробовать свои силы. Ведь это так интересно! И вдруг мы замечаем, что он неплохо решает задачи «на соображение», задачи с «изюминкой», при решении которых встают в тупик многие отличники. После олимпиады ученик наверняка более серьезно займется математикой. Учитель поможет этому ученику в его занятиях, найдет пути развития математических способностей такого ученика, порекомендует ему математическую литературу, задачи и т.п.

Любой участник олимпиады желает добиться лучших результатов. Для этого он решает задачи, читает рекомендованную литературу, более подробно изучает отдельные вопросы математики, активнее участвует в работе математического кружка. Он понимает, что для успеха на олимпиаде необходимо уметь по-разному решать задачи, развивать в себе способности анализировать решения задач и искать нешаблонные подходы к их решению, видеть неожиданные зависимости. Победа учащегося на каждом этапе приводит к повышению результативности его занятий математикой.

Проведение олимпиад позволяет выявить учащихся, имеющих интерес и склонности занятиям математикой, что весьма важно для решения вопроса о подготовке большого числа новых математических и научно-методических кадров, столь необходимых стране в век бурного развития науки и техники. При систематическом проведении олимпиад во всех школах, районах, областях, при широком охвате ими учащихся олимпиады являются эффективным средством реализации указанной цели и решения названной задачи.

Проведение олимпиад и всей внеклассной работы по математике является прекрасным средством повышения деловой квалификации учителей. Чтобы подготовить учащихся к участию в олимпиадах и проводить олимпиады, учителю математики необходимо вести кружки, проводить большую подготовительную работу, подбирать и решать различные задачи, детально знакомиться с различными вопросами математики, с новинками математической литературы. Подбор материала для кружковых занятий и для олимпиад, подготовка к проведению этих мероприятий является одной из форм активной работы учителя по повышению своей научно-методической квалификации. Подбор задач к занятиям математического кружка и к олимпиаде требует особых приемов от самого учителя математики. Руководитель кружка тщательно продумывает методику работы над каждой задачей, предлагаемой им кружковцам. На занятиях кружка приходится несколько расширять изучаемый в классе материал курса математики, иногда такое расширение выходит за рамки обязательной программы. Рассмотрение на занятиях кружка таких вопросов неизбежно приводит учителя к необходимости основательного знакомства с этим материалом и с методикой его изложения учащимся.

Проведение олимпиад, руководство математическими кружками дают учителям эстетическое наслаждение. Здесь в свободной обстановке учитель занимается любым предметом, рассматривает с учащимися наиболее интересные вопросы, да и учащиеся здесь более активны и внимательны, чем обычный класс.

Олимпиады подводят итог всей внеклассной работы по математике в каждой школе, районе, области, республике. Школьные и районные олимпиады позволяют сравнить качество математической подготовки и математического развития учащихся, а также состояние преподавания математики в отдельных классах школы, в отдельных школах района. Областные и республиканские олимпиады дают возможность в некоторой степени сравнить состояние математического образования в отдельных областях, краях и республиках страны. Международные олимпиады позволяют сопоставить состояние грани математического образования в средних школах разных стран. Возможность такого сравнения весьма важна в век научно-технической революции, ибо позволяет странам, участвующим в олимпиадах, своевременно принять необходимые меры для устранения пробелов в содержании математического образования школьников.

2. ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ СИСТЕМЫ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ К ОЛИМПИАДАМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Развитие учащихся во многом зависит от той деятельности, которую они выполняют в процессе обучения. Если деятельность репродуктивная – ученик получает готовую информацию, воспринимает ее, понимает, запоминает, а затем воспроизводит. Цель такой деятельности – формирование знаний, умений и навыков.

Если деятельность продуктивная – происходит активная работа мышления, связанная с логическими операциями анализа, синтеза, сравнения, аналогии, обобщения. Задумываясь над основанием собственных умений (рефлексируя), ребенок овладевает обобщенными способами действий, лежащими в основе этого умения, и тем самым приобретает знания, которые может конкретизировать при решении целого класса частных задач. В общем случае появлению конкретных знаний предшествует овладение методом получения этих знаний.

- До 6-7 лет ребенок, оперируя предметами, овладевает окружающим миром через конкретные действия; в этом возрасте большинство детей не может выполнять обратные операции и не владеет принципами сохранения количества и величины предмета;
- В период обучения в начальной школе (до 10-11 лет) от действий с предметами ребенок постепенно переходит к выполнению операций с образами (символами) этих предметов; ребенок в этом возрасте в состоянии выполнять операции непосредственно с помощью проб и ошибок, а сначала мысленно; может совершать действия в обратной последовательности; дети этого возраста способны упорядочивать имеющиеся предметы, овладевают принципом сохранения, однако все операции конкретны и ограничены его жизненным опытом;
- Примерно к 12 годам ребенок переходит в последнюю стадию умственного развития (стадию «формальных операций»), когда становиться возможным выполнение мыслительных операций, уже не опирающихся на личный конкретный опыт; ребенок овладевает абстрактно-понятийными способами мышления и к 14-15 годам у него формируется логика взрослого человека.
- Помимо данных особенностей развития, одаренных учащихся часто характеризуют: свернутость и вариативность мышления, долговременная память, рассеянное внимание, психические отклонения, неадекватная самооценка и эгоизм.

Проанализировав данные психолого-физиологические положения и имеющиеся в распоряжении педагогов пособия по работе с одаренными детьми по математике, подготовке их к олимпиадам, я сделала вывод, что обычно их содержание организовано следующим образом: это сборники заданий для учащихся повышенной сложности и на смекалку с прилагаемыми ответами или, в лучшем случае, коротким решением.

При этом основным методом обучения детей остается репродуктивный: запоминание способа решения заданной конкретной задачи и тренинг (повторение способа решения при многократном выполнении однотипных заданий). При таком методе следующим этапом работы учителя является предложение детям карточек с набором заданий разных типов с целью идентификации ребенком по внешним признакам известных типов заданий и извлечения из памяти заученных способов их решения.

Но «развитая память еще не есть образованность, точная информация еще не есть знания» (У. Глассер). За счет усвоения готовых способов решения разнообразных частных задач невозможно получить развитие способности к самостоятельному нахождению способов решения. Поэтому учащийся, столкнувшись с задачей нового типа или более повышенной сложности, часто терпит неудачу при ее решении…, однако одаренный ребенок не отказывается от решения сразу, как обычный школьник, а пытается решить ее. В случае неуспеха возникают критические ситуации, выход из которых возможен в одной из следующих стратегий: преодоление (конструктивная стратегия), либо приспособление или отторжение (неконструктивные стратегии поведения).

В предлагаемой нами методике работы с одаренными детьми по математике главной задачей является раскрытие принципов действия, решение задачи не ради точного ответа, а ради способа его получения, ради логических рассуждений (зачастую свернутых) на пути к нему. Для осуществления технологического процесса при данном подходе к обучению необходима строгая логика построения учебного содержания.

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СРЕДСТВ ИКТ В ПРОЦЕССЕ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ К МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОЛИМПИАДАМ

Основной целью использования информационно-компьютерных технологий при подготовке к олимпиадам одаренных детей в 5 - 11 классов становится цель обеспечения индивидуализации обучения (наряду с целями экономии времени и повышения доли наглядности в обучении, приводимыми в некоторых электронных пособиях).

Разработка методов обучения с помощью информационных и компьютерных технологий и фрагментов электронных уроков, ориентированных на одаренных детей, а также выявления позитивных и негативных последствий, которые оказывает информатизация на обучение и развитие одаренных детей.

Одним из очень интересных факторов, создающих предпосылки для успешного обучения одаренных детей с использованием средств ИКТ и Интернета является то, что таких детей характеризует высокая самостоятельность в процессе познания. Они широко используют «саморегуляционные стратегии» обучения и легко переносят их на новые задачи (в том числе задачи старших классов, вплоть до 10-11 класса), что позволяет опережать программный материал и создаёт предпосылки для новых форм индивидуализации в обучении. Эти дети могут учиться автономно, в том числе и при поддержке учителя.

Также разработка специальных компьютерных обучающих программ, расширяющих возможности реализации новых способов и форм самообучения и саморазвития, а также компьютеризация контроля знаний способствуют реализации принципа индивидуализации обучения, столь необходимого для одаренных учащихся, в том числе при подготовке к олимпиадам.

4. МЕТОДЫ И ФОРМЫ РАБОТЫ С УЧАЩИМИСЯ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ОЛИМПИАДАМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Основной формой организации учебного процесса в школах района остается урок. Формы и приемы в рамках отдельного урока отличаются значительным разнообразием и направленностью на дифференциацию и индивидуализацию работы. Широкое распространение получили групповые формы работы, различного рода творческие задания, различные формы вовлечения учащихся в самостоятельную познавательную деятельность, дискуссии, диалоги. Перечисленные формы работы и виды деятельности находят широкое применение в рамках нестандартных уроков, в исследовательской деятельности.

Важным фактором, влияющим на развитие одаренных школьников и на выявление скрытых способностей, является система воспитательной работы в образовательных учреждениях. На протяжении последних лет стал традиционным интеллектуальный марафон учеников, обучающихся по системе развивающего обучения Л.В.Занкова, который проходит только на уровне школ.

Система развивающего обучения Л.В.Занкова:

- Принцип деятельности;
- Принцип непрерывности;
- Принцип целостного представления о мире;
- Принцип минимакса;
- Принцип психологической комфортности;
- Принцип вариативности;
- Принцип творчества

Проводя мониторинг результатов предметных олимпиад, мы определяем уровень овладения знаниями и умениями мотивированных к учебной творческой деятельности учеников школы. Прежде всего, это даёт представление о потенциале школы, позволяет выстроить перспективу развития школы, кроме того, провести отбор и дальнейшее отслеживание одарённых учащихся.

Олимпиады занимают важное место в развитии детей. Именно на 1 ступени обучения происходят первые открытия ребенка. Пусть они даже небольшие и как будто незначительные, но в них – ростки будущего интереса к науке. Реализованные возможности развивают ребёнка, стимулируют интерес к различным наукам. Олимпиады позволяют ученику познать себя, дают возможность в большей степени утвердиться в собственных глазах и среди окружающих. В целом они служат развитию творческой инициативы ребёнка.

Методы и формы работы с одаренными учащимися, прежде всего, должны органически сочетаться с методами и формами работы со всеми учащимися школы и в то же время отличаться своеобразием.

Могут использоваться, в частности, тематические и проблемные мини-курсы «мозговые штурмы» во всех вариантах: ролевые тренинги, развитие исследовательских умений и художественной активности в форме научно-практической работы или творческих зачетов и т.д.

Решая вопрос об организационных формах работы с одаренными учащимися, следует признать нецелесообразным в условиях школы выделение таких учащихся в особые группы для обучения по всем предметам. Одаренные дети должны обучаться в классах вместе с другими учащимися. Это позволит создать условия для дальнейшей социальной адаптации одаренных детей и одновременно для выявления скрытой до определенного времени одаренности, для максимально возможного развития всех учащихся для выполнения ими различного рода проектной деятельности, творческих заданий.

Формы работы:

- Классно-урочная (работа в парах, в малых группах), разноуровневые задания, творческие задания;
- Консультирование по возникшей проблеме с родителями:

- психологическое сопровождение родителей одаренного ребенка;
- совместная практическая деятельность одаренного ребенка и родителей;
- поддержка и поощрение родителей одаренных детей;
- родительские собрания;

- Научные кружки, общества;
- Дискуссия;
- Театрализованные праздники.

При работе с одарёнными детьми учитель должен обладать определёнными навыками:

- Обогащать учебные программы, т.е. обновлять и расширять содержание образования;
- Работать дифференцированно, осуществлять индивидуальный поход и консультировать учащихся;
- Стимулировать познавательные способности учащихся;
- Принимать взвешенные психолого-педагогические решения;
- Анализировать свою учебно-воспитательную деятельность и всего класса;
- Отбирать и готовить материал для коллективных творческих дел.

Конечно, каждый учитель в работе с одарёнными детьми должен использовать дифференцированный подход, который позволяет расширять и углублять образовательное пространство предмета, учитывать индивидуальное продвижение каждого одаренного ученика из какой бы категории он не был. Использовать индивидуальные, парные, групповые формы работы, различного рода задания, формы вовлечения учащихся в самостоятельную познавательную деятельность, дискуссии, диалоги.

Целесообразно широко использовать следующие технологии обучения:

- Технология кооперативного обучения;
- Технология педагогических мастерских;

- Проектное обучение;
- Технология полного усвоения;
- Проблемное усвоение.

Детская одаренность - сложное и многоаспектное явление. Поэтому возникает острая необходимость научно-обоснованных методов работы с детьми с различными видами одаренности.

Выделяются два аспекта поведения одаренного ребенка: инструментальный и мотивационный.

Инструментальный аспект поведения одаренности может быть описан следующими признаками:

- Быстрое освоение деятельности и высокая успеваемость ее выполнения;
- Выдвижение новых целей деятельности за счет более глубокого овладения предметом, ведущее к новому видению ситуации, появление неожиданных идей и решений.

Сформированность качественного своеобразного индивидуального стиля деятельности, выражающегося в склонности «все делать по-своему» и связанного с присущей одаренному ребенку самодостаточной системой саморегуляции.

Особый тип организации знаний одаренного ребенка: высокая структурированность; способность видеть изучаемый предмет в системе разнообразных связей; увлеченность общими идеями, склонность отыскивать и формулировать общие закономерности.

Своеобразный тип обучаемости. Факты свидетельствуют, что одаренные дети, как правило, уже с раннего возраста отличаются высоким уровнем способности к самообучению, поэтому они нуждаются не столько в целенаправленных учебных воздействиях, сколько в создании вариативной, обогащенной и индивидуализированной образовательной среды.

Мотивационный аспект поведения одаренного ребенка может быть описан следующими признаками:

Повышенная избирательная чувствительность к определенным сторонам предметной деятельности: (знакам, звукам, цвету, растениям и т.д.) либо определенным формам собственной активности (физической, познавательной, художественно-выразительной и т.д.).

Повышенная познавательная потребность, которая проявляется в ненасытной любознательности, а также готовности по собственной инициативе выходить за пределы исходных требований деятельности.

Ярко выраженный интерес к тем или иным занятиям или сферам деятельности, чрезвычайно высокая увлеченность, каким-либо предметом, погруженность в то или иное дело.

Предпочтение парадоксальной, противоречивой и неопределенной информации, неприятие стандартных, типичных заданий и готовых ответов.

Следует подчеркнуть, что поведение одаренного ребенка совсем не обязательно должно соответствовать одновременно всем вышеперечисленным признакам. Тем не менее, даже наличие одного из этих признаков должно привлечь внимание специалиста и ориентировать его на тщательный и длительный по времени анализ каждого конкретного случая.

Методы обучения являются важным фактором успешности усвоения знаний, а также развития познавательных способностей и личностных качеств. Основными являются методы творческого характера:

- **Проблемный;**
- **Поисковый;**

Создание на занятиях ситуации познавательного затруднения, при которой школьники поставлены перед необходимостью самостоятельно воспользоваться для изучения новой темы одной или несколькими мыслительными операциями: анализом, синтезом, сравнением, аналогией, обобщением и др. Это позволяет организовать активную самостоятельную деятельность учащихся, в результате чего происходит творческое овладение знаниями, навыками, умениями и развитие мыслительных способностей.

- **Эвристический;**

Состоит в том, что ученика путем ряда вопросов наводят на решение проблемы, подлежащей рассмотрению. Этот метод применим во всех случаях, когда учитель заинтересован возбудить в ученике способность комбинировать известные данные. Эвристический метод лучше применим в предметах, требующих напряжения мысли и дедукции: при обучении математике и логике.

- **Исследовательский;**

Эти методы способствуют развитию и индивидуализации личности, а также формированию мотивации к получению учащимися знаний. Как нельзя лучше для использования этого метода подходят урок-исследование. Он позволяет ставить серьёзные проблемные вопросы, исследовательские задачи, а детская тяга «к тайнам» превращает его в «исследователя».

- **Проектные** (в сочетании с методами самостоятельной, индивидуальной и групповой работы).

Проектный метод представляет такой способ обучения, который, по словам Дж. Дьюи, можно охарактеризовать как «обучение через делание». Когда учащийся самым непосредственным образом включен в активный познавательный процесс, самостоятельно формулирует учебную проблему, осуществляет сбор необходимой информации, планирует возможные варианты решения проблемы, делает выводы, анализирует свою деятельность, формируя новые знания и приобретая новый учебный жизненный опыт. Этот метод находит применение на различных этапах обучения в работе с учащимися и при работе с материалом различной сложности. Метод адаптируется к особенностям практически каждого учебного предмета и в данном аспекте несёт в себе черты универсальности.

В урочной деятельности используются следующие виды деятельности:

- Проблемно-развивающее обучение;
- Работа в малых группах;
- Проектно-исследовательская деятельность;

- Игровые технологии (деловые игры и путешествия).

Во время игр воспитывается характер, расширяется представление об окружающем, формируются и совершенствуются навыки, внимательность, сосредоточенность. Важно, чтобы в играх были заложены элементы творчества. Если им будет интересно, они не устанут, а значит необходимо, усложнять задачи.

Принципиально значимым в организации учебно-воспитательного процесса с одарёнными учащимися является использование информационно-коммуникативных технологий на всех этапах процесса обучения:

- При изучении нового материала, закреплении, повторении, контроле;
- Разноуровневые тесты, презентации, тренажёры; информационно-коммуникативные технологии для удовлетворения познавательной мотивации развития способностей;
- Творческие и нестандартные задания.

5. ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ

5.1 Развитие качеств ума и приемов умственной деятельности

Подготовку я начинаю с пятого класса, решая на уроках и задавая на дом олимпиадные задачи, которые развивают учащихся. Рассматриваем различные подходы к решению. Постепенно выделяется группа ребят, которые заинтересованы в отдельной работе.

Для развития логического мышления на уроках и при подготовки к олимпиадам надо:

- Применять решение упражнений, в которых встречаются взаимно обратные операции;
- Решать задачи несколькими способами, доказывать теоремы различными методами;
- Применять различные переформулировки условия задачи;
- Учить переключению с прямого ходу мыслей на обратный;
- Учить тому, какие знания, умения, навыки и в каком порядке применять в конкретной задаче и т.д.

Все задачи должны быть подобраны так, чтобы они были на развитие:

- Гибкостью ума;
- Глубины ума;
- Несколько качеств ума;
- Приема умственной деятельности анализа;
- Приема умственной деятельности классификации;
- Приема умственной деятельности сравнения;
- Приема умственной деятельности абстрагирования;
- Приема умственной деятельности аналогии.

Рассмотрим примеры задач, способствующие развитию данных качеств:

- Без карандаша и бумаги;
- Числовые головоломки;
- Некоторые старинные задачи;
- Решение задач с конца;
- Переливания;
- Знаете ли вы проценты ?;
- Арифметическая викторина;
- Рациональные числа;
- В мире чисел;
- Разные задачи (арифметическая смесь);

- Учитесь правильно рассуждать: «Не», «И», «Или», «Следует», «Равносильно»;
- Верные и неверные высказывания;
- Необходимые и достаточные условия;
- Некоторые теоремы и вопросы;
- Затруднительные положения;
- Математические софизмы;
- Где ошибка ?;
- Задачи на планирование;
- Сообразите;
- Докажите;
- Задачи на восстановление;
- Неопределенные уравнения;
- Геометрические задачи на вычисление, доказательство, построения с препятствиями и ограничениями;
- Геометрические головоломки;
- Разрежьте правильно на части;
- Площади;
- Восстановите;
- Геометрическая викторина.

5.2 Примеры задач на развитие качеств ума при подготовке к олимпиадам по математике

Без карандаша и бумаги.

Найдите простой прием вычислений и воспользуйтесь им для вычисления суммы:

1) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{8\cdot9}+\frac{1}{9\cdot10}$;

2) $\frac{1}{10\cdot11}+\frac{1}{11\cdot12}+\frac{1}{12\cdot13}+\frac{1}{13\cdot14}+\frac{1}{14\cdot15}+\ldots+\frac{1}{98\cdot99}+\frac{1}{99\cdot100}$.

Числовые головоломки.

1. Пользуясь пятью двойками и знаками действий, запишите число 28.
2. Пользуясь четырьмя двойками и знаками действий, запишите число 111.
3. Что больше: 10^{20} или 20^{10} ?
4. Что больше: 100^{20} или 9000^{10} ?

5. Найдите наименьшее число, которое при делении на 2 дает в остатке 1, при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 4 дает в остатке 3, при делении на 5 дает в остатке 4 и при делении на 6 дает в остатке 5.

Некоторые старинные задачи.

1. Один человек выпьет кадь пития в 14 дней, а со женою выпьет ту же кадь в 10 дней, и ведательно есть, в колико дней жена его особо выпьет ту же кадь.

2. Вол съел копну одним часом, а конь съел копну в два часа, а коза съела копну в 3 часа. Сколько бы они скоро, все три – вол, конь и коза – ту копну съели, сочти.

3. Четыре плотника у некоторого гостя нанялись двор ставити. И говорит первый плотник так: «Только бы мне одному тот двор ставити, я бы его поставил, един годом». А другой молвил: «Я бы его поставил в два года». А третий молвил: «Я бы его поставил в три года», а четвертый так рек: «Я бы его поставил в четыре года». Все те четыре плотника учали тот двор ставити вместе. Скольки долго они ставили, сочти.

Решение задач с конца.

1. С рынка возвращались две колхозницы. Одна из них спросила другую: «Что ты продавала ?» Ответ был таким: «Я продавала дыни, и получилась так, что первому покупателю я продала половину всех дынь и еще полдыни, второму – половину оставшихся у меня дынь и еще полдыни. Третьему покупателю я продала также половину оставшихся после второго покупателя дынь и еще полдыни. Больше дынь у меня не осталась». Сколько же дынь продала эта колхозница ?

2. Мать купила яблоки. Два из них взяла себе, а остальные разделила между тремя своими сыновьями так. Первому она дала половину всех яблок и половину яблока, второму – половину остатка и еще половину яблока, третьему – половину нового остатка и оставшуюся половину яблока. Не одного яблока при этом разрезать не пришлось. Сколько яблок купила мать ? Сколько яблок получил каждый из сыновей ?

3. Мать для трех своих сыновей оставила утром тарелку слив, а сама ушла на работу. Первым проснулся старший из сыновей. Увидев на столе сливы, он съел третью часть их и ушел. Вторым проснулся средний. Думая, что его братья еще не ели слив, он съел третью часть того, что было на тарелке, и ушел. Позднее всех встал младший. Увидев сливы, он решил, что его братья еще не ели их, а потом съел лишь третью часть лежавших на тарелке слив, после чего на тарелке осталось восемь слив. Сколько всего слив было вначале ?

4. У моста через реку встретились лодырь и черт. Лодырь пожаловался на свою бедность. В ответ черт предложил: «Я могу помочь тебе. Каждый раз, как ты перейдешь этот мост, у тебя деньги удвоятся. Но каждый раз, перейдя мост,

ты должен будешь отдать мне 24 тенге». Три раза проходил лодырь мост, а когда заглянул в кошелек, там стала пусто. Сколько же денег было у лодыря ?

Переливания.

1. Можно ли, имея лишь два сосуда емкостью 3 и 5 литров, набрать из крана 4 литра воды ?

2. Имеются два сосуда. Емкостью 9 и 4 литра. Как с помощью этих сосудов набрать из бака 6 литров некоторой жидкости ? (Жидкость можно сливать обратно в бак).

3. Как, имея два сосуда емкостью 5 и 9 литров, набрать 3 литра воды ?

4. Имеют три сосуда вместимостью 8, 5 и 3 литра. Первый из них наполнен водой. Как разлить воду в 2 из этих сосудов так, чтобы в каждом было по 4 литра ?

Знаете ли вы проценты ?

1. Магазин продал одному покупателю 25% имевшегося в куске полотна, второму покупателю – 30% остатка, а третьему – 40% нового остатка. Сколько процентов полотна осталось непроданным ?

2. Влажность воздуха к полудню по сравнению с утреней снизилась на 12%, а затем к вечеру еще на 5% по сравнению с полуднем. Сколько процентов от утреней влажности воздуха составляет влажность воздуха к вечеру и на сколько процентов она снизилась ?

3. На сколько процентов увеличится площадь квадрата, если периметр его увеличить на 10% ?

4. На сколько процентов увеличится площадь прямоугольника, если длину прямоугольника увеличить на 20%, а ширину – 10% ?

5. На сколько процентов увеличится объем куба, если длина каждого ребра увеличиться на 20% ?

6. Выразите в процентах изменения площади прямоугольника, если длина его увеличить на 30%, а ширина уменьшится на 30% ?

Арифметическая викторина.

1. Может ли сумма трех последовательных натуральных чисел быть простым числом ? А двух ? А четырех ?

2. Какой цифрой оканчивается сумма: $121^6 + 234^6 + 16^6$?

3. Какой цифрой оканчивается обычная запись числа:

1) 66^{66}; 2) 33^{33}; 3) 7^7.

4. В десятичной записи числа 73 цифры и все они единицы делится ли это число на 18 ?

Рациональные числа.

1. Пусть m и n - числа либо противоположные, либо равные. В каком случае $m - n = 0$? $m - n = 2m$? $m - n = -2n$?

2. Могут ли выражения $2 + |a|$ и $3\ |a| + 7$ принимать отрицательные значения ?

3. Указать такие значения a, при которых равенство верно:
1) $|a| = -a$;   2) $|a| = a$.

4. Указать такие значения k и n, при которых верны:
1) неравенство $k < -k$;   2) равенство $n = -n$.

5. Указать такие значения m, при которых верны:
1) неравенство $m < |m|$;   2) равенство $m = |-m|$.

6. При каких значениях получаются истинные высказывания:
1) $-c = |-c|$;   2) $-c < |-c|$;   3) $-c < |c|$.

7. Пусть числа a и b либо оба положительны, либо оба отрицательны, при этом $a > b$. При каких значениях a и b верны неравенства:
1) $|a| > |b|$;   2) $|a| < |b|$;

8. Если $a \neq b$ и $b \neq 0$, то верно ли утверждение, что всегда $a + b \neq 0$?

9. Указать такие значения b, при которых разность $a - b$ больше суммы $a + b$?

10. Пусть $a \neq 0$, $b \neq 0$. Верно ли утверждать, что $ab \neq 0$?

11. Верно ли утверждать, что при любых рациональных значениях k выполняется неравенство $2k > k$? Рассмотреть случай:
1) $k < 0$;   2) $k = 0$;   3) $k > 0$.

12. Пусть $p > q$. Найдите наименьшее и наибольшее из чисел $\frac{p+q}{2}$ и q.

В мире чисел.

Выполните указанные действия:
1) $1011001_2 + 1000111_2$;   2) $11011_2 \cdot 1101_2$;
3) $322_5 \cdot 14_5$;   4) $1111010101111_2 : 1011_2$;
5) $3240_5 + 4023_5$;   6) $1421_8 + 20476_8$;
7) $23265_8 - 4762_8$;   8) $121_3 \cdot 12_3$;
9) $120101_3 : 102_3$.

Разные задачи (арифметическая смесь).

1. В записи 888888888 поставьте между некоторыми цифрами знаки сложения так, чтобы получилось в сумме 1000.

2. Сравните дроби: $\frac{23}{99}$; $\frac{2323}{9999}$; $\frac{232323}{999999}$.

3. Запишите в виде возрастания дроби: $\frac{3001}{5001}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{301}{501}$; $\frac{31}{51}$.

4. Имеются 9 кг крупы и гири в 50 и 200 гр. Как отмерить в три приема на чашечных весах 2 кг крупы ?

5. Делится ли число $7^{77} + 1$ на 5 ?

6. Может ли сумма 1 + 2 + 3 + … + (k – 1) + k при каком–нибудь натуральном значении k оканчиваться цифрой 7 ?

7. Докажите, что если сумма двух натуральных чисел меньше 13, то произведение их не больше 36.

8. Какое из чисел: 222^2, 22^{22}, 2^{222}, 22^{2^2}, 2^{22^2}, $2^{2^{22}}$, $2^{2^{2^2}}$ наибольшее ?

9. Какие четыре гири нужно иметь, чтобы с их помощью можно было на чашечных весах отвесить любое целое число килограммов, не превосходящее 40 ?

10. 1) Какая, из двух дробей: $\frac{22}{35}$ и $\frac{110}{177}$ - больше ? 2) Какая, из двух дробей: $\frac{1983}{1984}$ и $\frac{1984}{1985}$ - больше ? Как проще сравнить эти дроби ?

11. Сколько цифр нужно употребить для нумерации книги, в которой 634 страницы ?

12. Какую массу имеет налим, если его масса равна сумме 750 г и массы $\frac{3}{4}$ того же налима ?

13. Сколько раз нужно взять слагаемым натуральное число a, чтобы получить a^n (n - натуральное число) ?

14. Докажите, что если $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, то $a = b = c$.

15. Докажите, что разность $999993^{1999} – 777777^{1997}$ кратна 5.

16. Вычислите значение выражения $\frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b}$, если известно, что $10a^2 – 3b^2 + 5ab = 0$ и $9a^2 – b^2 \neq 0$

17. Пусть a – одна из цифр, отличная от 0 и 1. Какое из чисел, записанных в форме a^{a^a} или $a^{\overline{aa}}$, будет больше ?

18. Докажите, что если верно равенство $\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, то или $a + b = 0$, или $b + c = 0$, или $a + c = 0$ ($abc \neq 0$, $a + b + c \neq 0$).

19. Докажите, что число $\underbrace{111\ldots1}_{2n\text{ цифр}} - \underbrace{222\ldots2}_{n\text{ цифр}}$ является квадратом

некоторого натурального числа.

Учитесь правильно рассуждать: «Не», «И», «Или», «Следует», «Равносильно».

1. Какие из приведенных ниже высказываний верные, а какие неверные:

1) Деление $a : b$ без остатка возможно, если число а кратно числу b, $b \neq 0$.
2) Число 4 удовлетворяет неравенству $x < 8$ и неравенству $x > 2{,}5$.
3) Не все простые числа нечетные.
4) Число 0,5 удовлетворяет неравенствам:
а) $x < 0{,}5$; б) $x \leq 0{,}5$; в) $x \geq 0{,}5$; г) $x > 0{,}5$.
5) Каждый треугольник имеет два тупых угла.

2. Сформулируйте отрицания высказываний:
1) Все числа, делящиеся на 3, нечетные.
2) Вертикальные углы равны.
3) Равные углы вертикальны.
4) Каждому натуральному числу предшествует одно натуральное число.

3. Истинны или ложны высказывания:
1) $A \wedge (\rceil A)$; 2) $A \vee (\rceil A)$; 3) $\rceil(\rceil A) = A$.

Предложенные в задаче сложные высказывания имеют в логике специальные названия: $\rceil(\rceil A) = A$ - закон двойного отрицания; $A \wedge (\rceil A)$ - закон противоречия; $A \vee (\rceil A)$ - закон исключенного третьего. Эти высказывания часто применяются в доказательствах теорем, а законы противоречия и исключительного третьего лежат в основе доказательства методом сведения к противоречию (методом «от противного», как говорят иногда в школе).

Верные и неверные высказывания.

1. Какие из приведенных ниже высказываний, верные и какие неверные:
1) Если произведение двух натуральных чисел делится на 6, то хотя бы один из множителей делится на 6.
2) Для того чтобы число делилось на 2, необходимо, чтобы оно оканчивалось нулем.
3) Сумма двух нечетных чисел есть нечетное число.
4) Не существует целого числа, куб которого оканчивался бы цифрой 2.
5) Для того чтобы $a^3 = a^2$, необходимо, чтобы $a = 1$.
6) Для того чтобы куб целого числа делится на 5, необходимо, чтобы само число делилось на 5.
7) Квадрат любого четного числа делится на 4.
8) Всякое натуральное число, большее 1, делится хотя бы на одно простое число.
9) Если $|a| = |b|$, то $a = b$.
10) Если $a = b$, то $|a| = |b|$.
11) Если $ab > 0$, то $a > 0$ и $b > 0$.
12) $(a \neq 0 \wedge b \neq 0) \Rightarrow (a + b \neq 0)$.
13) $(a + b \neq 0) \Rightarrow (a \neq 0 \wedge b \neq 0)$.
14) $(a \in |0; 1|) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} > 1\right)$.
15) $(a \neq 0 \wedge a \neq 1) \Rightarrow \left(\frac{1}{a} > 1\right)$.
16) $(|a| > 1) \Leftrightarrow (a \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[)$.

17) ($x \in [1; 3]$) => ($x^2 \in [1; 9]$).

2. Доказать или опровергнуть следующие предложения:

1) $(a > b \wedge c < 0) \Rightarrow ac < bc$.
2) ($|b| < 2$) => ($b < 2$).
3) ($|b| < 2$) => ($b > -2$).
4) ($|b| < 2$) => ($b \in]-2; 2[$).
5) ($a > b$) <=> ($ac > bc$).

Необходимые и достаточные условия.

В каждом из следующих предложений вместо многоточия поставьте: «необходимо», или «достаточно», или «необходимо и достаточно».

1) Для того чтобы сумма двух чисел была четным числом, … , чтобы каждое слагаемое было четным.
2) Для того чтобы число делилось на 15, … , чтобы оно дели лось на 5.
3) Для того чтобы число делилось на 3, … , чтобы оно дели лось на 6.
4) Для того чтобы число делилось на 10, … , чтобы оно дели лось на 2 и 5.
5) Для того чтобы сумма двух натуральных чисел была больше 30, … , чтобы хотя бы одно из слагаемых была больше 15.
6) Для того чтобы произведение $(x - 3)(x + 2)(x - 5)$ было равно 0, … , чтобы $x = 3$.
7) Для того чтобы два квадрата имели одну и ту же площадь, … , чтобы стороны их были равны.
8) Для того чтобы сумма двух натуральных чисел делилась на 2, … , чтобы каждое слагаемое делилось на два.
9) Для того чтобы натуральное число делилось на 100, … , чтобы это число делилось на 10.
10) Для того чтобы натуральное число делилось на 100, … , чтобы это число делилось на 1000.
11) Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, … , чтобы его диагонали были равны.
12) Для того чтобы четырехугольник был параллелограмм, … , чтобы все стороны его были равны.
13) Для того чтобы параллелограмм был прямоугольником, … , чтобы все углы его были равны.
14) Для того чтобы параллелограмм был прямоугольником, … , чтобы его диагонали были равны.
15) Для того чтобы было неверно неравенство $\frac{1}{x} < 1$, … , чтобы было $x > 1$.
16) Для того чтобы было верно неравенство $\frac{1}{x} < 1$, … , чтобы было $x < 0$ или $x > 1$.

Некоторые теоремы и вопросы.

1. Пусть сумма трех целых чисел – число четное. Сформулируйте предложение о произведении этих чисел.

2. Верно ли утверждение: «Если каждый из множителей не делится на данное число, то и произведение их не делится на это число» ?

Затруднительные положения.

1. Из пяти гирь одна должна быть в 10 кг. Какими должны быть остальные гири, чтобы на чашечных весах можно было определить массу грузов от 1 кг до 85кг ?

2. На складе имеются гвозди в ящиках по 24, 23, 17 и 16 кг. Может ли кладовщик отпустить со склада 100 кг гвоздей, не распечатывая ящики ?

3. Как, имея 22 спички, сложить контур прямоугольника с наибольшей площадью ? Ломать спички нельзя.

4. Можно ли расставить на столе 4 пустые молоточные бутылки так, чтобы горлышки их находились на одном и том же расстоянии друг от друга? (Бутылки можно ставить и вверх дном).

5. Как с помощью масштабной линейки измерить диагональ кирпича ?

6. Кузнецу принесли 5 обрывков цепи, по 3 звена в каждом, и попросили соединить их в одну цепь. Кузнец задумался, как выполнить этот заказ проще. Сколько же звеньев нужно разъединить, а затем вновь соединить, чтобы все обрывки образовали одну цепь ? Подумав, кузнец приступил к делу и, раскрыв только три звена, выполнил заказ. Как это сделал кузнец ?

7. Из квадрата бумаги, сторона которого равна 3 единицам длины, нужно вырезать фигуру, представляющую собой развертку полной поверхности куба, длина ребра которого равна 1 единице длины. Как это можно сделать ?

Математические софизмы.

1. **5 = 6.** Попытаемся доказать, что 5 = 6. С этой целью возьмем числовое тождество: 35 + 10 – 45 = 42 + 12 – 54. Вынесем общие множители левой и правой частей за скобки. Получим: 5(7 + 2 – 9) = 6(7 + 2 – 9). Разделим обе части этого равенства на общий множитель (заключенный в скобки). Получаем 5 = 6. В чем ошибка ?

2. **2 · 2 = 5.** Обозначим: $4 = a$, $5 = b$, $\frac{a+b}{2} = d$. Имеем: $a + b = 2d$, $a = 2d - b$, $2d - a = b$. Перемножим два последних равенства по частям. Получим: $2da - a^2 = 2db - b^2$. Умножим обе части получившегося равенства на – 1 и прибавим к результатам d^2. Будем иметь: $a^2 - 2da + d^2 = b^2 - 2db + d^2$, или $(a - d)^2 = (b - d)^2$, откуда $a - d = b - d$ и $a = b$, т.е. 2 · 2 = 5. Где допущена ошибка ?

3. Все числа равны между собой. Пусть $m \neq n$. Возьмем тождество: $m^2 - 2mn + n^2 = n^2 - 2mn + m^2$. Имеем: $(m - n)^2 = (n - m)^2$. Отсюда $m - n = n - m$, или $2m = 2n$, а значит, $m = n$. В чем ошибка ?

4. Любое число равно его половине. Возьмем два равных числа a и b, $a = b$. Обе части этого равенства умножим на a и затем вычтем из произведений по b^2. Получим: $a^2 - b^2 = ab - b^2$, или $(a + b)(a - b) = b(a - b)$. Отсюда $a + b = b$, или $a + a = a$, так как $b = a$. Значит, $2a = a$, или $a = \frac{a}{2}$. Какая ошибка допущена в этих рассуждениях ?

5. Любое число равно числу, в два раза большему его. Пусть a – какое угодно число. Возьмем тождество $a^2 - a^2 = a^2 - a^2$. В левой части его вынесем a за скобки, а правую часть разложим на множители по формуле разности квадратов. Тогда получим: $(a - a)a = (a - a)(a + a)$. Упростив это тождество, получим: $a = 2a$. В чем здесь ошибка ?

6. Любое число равно 0. Найдите ошибку в таком рассуждении. Каково бы ни было число a, верны равенства: $(+a)^2 = a^2$ и $(-a)^2 = a^2$. Следовательно, $(+a)^2 = (-a)^2$, а значит, $+ a = - a$, или $2a = 0$, и поэтому, $a = 0$.

7. «Новое доказательство» теоремы Пифагора. Возьмем прямоугольный треугольник с катетами a и b, гипотенузой c и острым углом α, противолежащим катету a. Имеет: $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$, откуда $a^2 = c^2\sin^2\alpha$, $b^2 = c^2\cos^2\alpha$. Просуммировав по частям эти равенства, получаем: $a^2 + b^2 = c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$. Но $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, и поэтому $a^2 + b^2 = c^2$. Подвергните критике это «доказательство».

8. Квадрат любого числа равен 1. Пусть m – какое угодно число. Обозначим: $x = y = \frac{m^4}{4}$. Имеем: $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ и $x - \sqrt{x} = y - \sqrt{y}$, или $x - y = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ что можно переписать так: $(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ $(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ = $\sqrt{x} - \sqrt{y}$. Из полученного равенства находим: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$. Следовательно: $2\sqrt{x} = 1$, но $x = \frac{m^4}{4}$, и поэтому $2\sqrt{\frac{m^4}{4}} = 1$, или $m^2 = 1$. Где ошибка ?

Где ошибка ?

1. Два ученика решили уравнение $5x\sqrt{2x} = 15\sqrt{8x}$ различными способами. Решение первого ученика:
$5x\sqrt{2x} = 15\sqrt{8x}$, $x\sqrt{2x} = 3 \cdot 2\sqrt{2x}$, $\sqrt{2x}\,(x - 6) = 0$, $\sqrt{2x} = 0$, или $x - 6 = 0$, $\sqrt{2x} = 0$ <=> $x = 0$, $x - 6 = 0$ <=> $x = 6$.
Ответ: $x = 0$, $x = 6$.
Решение второго ученика:
$5x\sqrt{2x} = 15\sqrt{8x}$, $x\sqrt{2x} = 3\sqrt{8x}$. Возьмем обе части уравнения в квадрат: $2x^3 = 72$ <=> $2x(x - 6)(x + 6) = 0$.
Ответ: $x = 0$, $x = 6$, $x = - 6$.
1) Которое решение выполнено правильно ?
2) Объясните допущенные ошибки.

2. Два ученика вычисляли при $n = 3$ значение выражения $n + \sqrt{1 - 2n + n^2}$ каждый своим способом.

Один из них рассуждал так: $n + \sqrt{1-2n+\ n^2} = n + \sqrt{(1-\ n)^2} = n + 1 - n$ = 1 при любых n.

Другой сразу подставлял в алгебраическое выражение заданное значение n : $3 + \sqrt{1-2\ \cdot 3+\ 3^2} = 3 + \sqrt{4} = 5$.

1) Кто из двух верно решил задачу ?

2) Найти допущенные ошибки.

3. Решая уравнение $ax^2 + c = 0$, ученик нашел его корни $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $\sqrt{-\frac{c}{a}}$. При подстановке же первого корня в данное уравнение у него получилось следующее:

$a\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2 + c = a\sqrt{\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2} + c = a\sqrt{\frac{c^2}{a^2}} + c = \frac{ac}{a} + c = c + c \neq 0$ при $c \neq 0$. Значит, $x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ не является корнем уравнения $ax^2 + c = 0$. Совершенно аналогично проверял ученик и второй корень уравнения. Найти ошибки, допущенные учеником.

4. один ученик рассуждал так: «Известно, что если диагональ параллелограмма взаимно перпендикулярны, то такой параллелограмм – ромб. Нам дан параллелограмм, диагонали которого не являются взаимно перпендикулярными. Следовательно, этот параллелограмм не ромб». В чем ошибка ?

Задачи на планирование.

1. Требуется поджарить 3 ломтика хлеба. На сковороде умещались лишь два ломтика. На поджаривание ломтика с одной стороны требуется 1 мин. За какое кратчайшее время можно поджарить с двух сторон все 3 ломтика ? (Время на перевертывание и перекладывание ломтиков можно в расчет не принимать).

2. Имеются неверные (неравноплечие) чашечные весы. Пользуясь ими, весовщик должен определить массу некоторого груза. Может ли весовщик достаточно точно найти массу этого груза с помощью двух измерений: кладя сначала груз на одну чашку весов и гири на другую, а затем груз на вторую чашку и гири на первую ? (Массой чашек по сравнению с массой груза можно пренебречь).

3. Чтобы отвесить 2 кг крупы на неверных чашечных весах, хозяйка поступила так: сначала гирю в 1 кг она положила на одну чашку весов и отвесила крупу, затем эту гирю положила на другую чашку и отвесила крупу. Ссыпав вместе отвешенную крупу, она решила, что масса ее в точности равна 2 кг. Так ли это ?

4. На втулку диаметром 30 мм требуется намотать пружинную ленту толщиной 0,25 мм так, чтобы общий диаметр втулку с намотанной на нее лентой был равен 130 мм. Какой длины должна быть лента ?

Сообразите.

1. В 12 ч дня часовая и минутная стрелки часов совпадают. Через сколько минут после этого они снова совпадут ?

2. Несколько девочек (все разного возраста) ходили в лес по грибы. Собранные ими грибы они решили разделить поровну. Самой младшей дали 20 грибов и еще 0,04 остатка. Следующей за ней по возрасту дали 21 гриб и еще 0,04 остатка. Третьей – 22 гриба и 0,04 остатка и так далее. Сколько было девочек ? Сколько грибов получила каждая ?

3. От листа железа квадратной формы отрезали полосу шириной 25 см. Вычислить первоначальные размеры листа, если площадь оставшейся части оказалась равной 4400 см^2.

4. Трава на лугу растет одинаково густо и быстро. 70 коров могут поесть ее за 24 дня, а 30 коров – за 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву за 96 дней ?

5. Что больше $\sqrt[5]{5}$ или $\sqrt[3]{3}$?

6. Решите неравенства: 1) $|x-3|<|x-2|$; 2) $\left|\frac{x}{2}-1\right|+|x|>3$.

7. Решите неравенства:

1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}>0$; 2) $\sqrt{2-x}+\sqrt{x-3}>0$;

3) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}\geq 0$; 4) $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-3}\leq 0$.

8. Найдите числовое значение выражения возможно быстрее:

1) $(a+b)^2-(a-b)^2$ при $a=\frac{17}{37}$, $b=-2\frac{3}{17}$.

2) $a^2(a+b^2)(a^4-b^{10})(a^2-b)$ при $a=5$, $b=25$.

3) $\frac{m^2(m+n^2)(m^3-n^6)(m^2-n)}{m^2+n^2}$ при $m=4$, $n=16$.

9. Упростите выражения:

$$\frac{1}{1-a}+\frac{4}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}$$

и найдите числовое значение его при $a=2$.

10. Найдите простой способ вычисления суммы:

1) $s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}$.

2) $s=1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+\ldots+2^{63}$.

3) $s = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\,(n+1)}$.

11. Упростите выражение $80\,(81^9 + 81^8 + 81^7 + \ldots + 81^2 + 82) + 1$.

12. Найдите положительные корни уравнения $x^x + x^{1-x} = x + 1$.

13. Из разговора 1 сентября: «Сколько тебе еще учится ?» - «Сколько, сколько ты уже проучился. А тебе ?» - «В полтора раза больше». Кто в какой класс перешел ?

Докажите.

1. Число $m^3 - m$ при любом натуральном делится на 6.
2. Число $m^2 - 1$ при нечетном делится на 8.
3. $p^2 - 1$, где p – простое число, большее 3, делится на 24.
4. $n^5 - n$ делится на 30 при любом натуральном n.
5. Если целое число а не делится на 5, то $a^4 - 1$ делится на 5.
6. $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \ldots + 7^n$ делится на 400 при любом натуральном n.
7. Число $a^8 + b^8 + c^8$ не оканчивается цифрой 9 ни при каких натуральных значениях a, b и c.
8. Всякое число вида $n^4 + 4$, где n – натуральное число и $n > 1$, является составным.
9. Двучлен $2a^2 + 2b^2$ можно представить в виде суммы квадратов двух двучленов.
10. Многочлен $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ можно представить в виде суммы квадратов трех выражений.
11. Двучлен $3a^4 + 1$ можно представить в виде суммы квадратов трех двучленов.
12. При любом натуральном имеет место тождество:

$1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \ldots + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 1 \cdot n + 2(n - 1) + 3(n - 2) + \ldots + n \cdot 1$.

13. Докажите, что $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{9999}{10000} < 0{,}01$.

14. Докажите неравенства:

1) $(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$ при $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $c \geq 0$.

2) $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$ при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

3) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$ при любых действительных x, y и z.

4) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 3 > 0$ при любых действительных x и y.

5) $ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) \geq 6abc$ при $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$.

6) $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ при $a \geq 0,\ b \geq 0$.

15. Докажите, что $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{100^2} < 0{,}99$.

Задачи на восстановление.

1. Разность квадратов двух последовательных натуральных чисел равна 81. Восстановите эти числа.

2. Восстановите числовые значения k в уравнении $2kx^2 - 2x - 3k - 2 = 0$, при которых один корень уравнения равен 0.

3. Дано уравнение $(k - 2)x^2 + 2(k - 1)x + k - 3 = 0$. При каких значениях k уравнение:

1) имеет два равных корня;

2) не имеет действительных корней ?

4. Восстановите многочлен третьей степени, если известно, что он обращается в 0 при $x = -1$, а при делении на $x - 1$, $x + 2$ и $x + 3$ дает каждый раз один и тот же остаток 8.

5. Какой многочлен при возведении в третью степень дает многочлен $x^6 + 9x^5 + 30x^4 + 45x^3 + 30x^2 + 9x + 1$?

Неопределенные уравнения.

1. Найдите двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

2. Сколько существует способов составить отрезок длиной 1 м из отрезков длиной 7 и 12 см ?

3. Павел с сыном и Семен с сыном были на рыбалке. Павел поймал столько же рыб, сколько его сын Игорь, а Семен – втрое больше, чем его сын. Всего же они поймали 35 рыб. Как зовут сына Семена ? Кто сколько поймал рыб ?

4. При делении некоторого числа на 13 и 15 получились одинаковые частные, но при делении на 13 получился остаток 8, а деление на 15 выполнено без остатка. Найдите это число.

5. Докажите, что если a, b и $c \in \mathrm{Q}$ и $|a + c| = |b|$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет рациональные корни.

6. При каких значениях a и b уравнение $(x - a)^3 - (x - b)^3 = b^3 - a^3$ имеет единственное решение ?

7. Решите в неотрицательных целых числах уравнение

$x^{n+3} + y^{n+3} + z^{n+3} + x^n + y^n + z^n = x^{n+2} + y^{n+2} + z^{n+2} + x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1}$,

где $n \geq 1$ и $n \in \mathrm{N}$.

Геометрические задачи на вычисление, доказательство, построения с препятствиями и ограничениями.

1. Диагональ трапеции перпендикуляра боковой стороне; острый угол, лежащий против этой диагонали, равен 40^0.Найдите остальные углы этой трапеции, если длина меньшего основания ее равна длине второй боковой стороны.

2. Верно ли считать четырехугольник квадратом, если его стороны имеют равные длины ?

3. Дан равноугольный многоугольник. Докажите, что сумма расстояний от внутренней точки его до прямых, определяемых сторонами многоугольника, постоянна.

4. Пусть М – произвольная внутренняя точка равностороннего треугольника АВС. Докажите существование треугольника, стороны которого соответственно равны МА, МВ и МС.

5. Докажите, что куб длины гипотенузы прямоугольного треугольника больше суммы кубов длин катетов.

6. На прямой даны k отрезков так, что каждые две из них имеют хотя бы одну общую точку. Докажите, что имеется по крайней мере одна точка, принадлежащая всем этим отрезкам.

7. Дан угол в 36^0. Как с помощью циркуля и линейки построить угол в 99^0?

8. Дан угол в 54^0. Как с помощью циркуля и линейки разделить его на три равных угла ?

9. Постройте треугольник со сторонами a, b и c по трем данным отрезкам $a + b$, $b + c$ и $a + c$.

10. Постройте ромб по диагонали и его высоте.

11. Дана полуокружность. На ее диаметре построены две равные полуокружности, касающиеся друг друга и данной полуокружности. Постройте окружность, касающуюся трех данных полуокружностей.

12. Постройте прямоугольный треугольник по медианам, проведенным к катетам.

13. Вершина С треугольника АВС не уместилась на чертеже. Постройте основания высоты и биссектрисы, проведенных из вершины С.

14. Вершина угла АВС недоступна, D - внутренняя точка этого угла. Придумайте несколько способов построения прямой BD.

15. Дан $\angle$ АВС. Пользуясь только циркулем, постройте точки A_1, B_1, C_1 так, чтобы $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$.

16. Даны две точки А и В. Требуется, пользуясь только циркулем, построить точку, которая лежала бы на прямой, определяемой точками А и В. Как это сделать ?

17. Даны две точки А и В. Пользуясь одним циркулем, постройте такую точку С, чтобы $|AC| = 3|AB|$.

18. Пользуясь только циркулем, постройте углы в 30^0, 60^0 и 90^0.

Геометрические головоломки.

1. Составьте ту же самую фигуру (рис. 1) и:
1) переложите 6 спичек так, чтобы получилась фигура, составленная из 6 равных ромбов;
2) уберите 6 спичек так, чтобы не осталось ни одного треугольника.

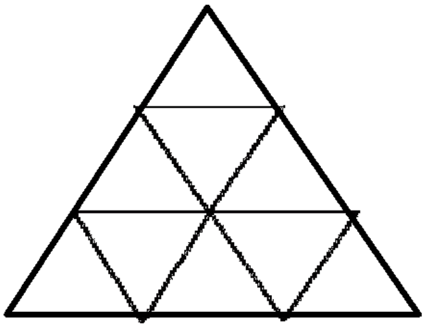


Рисунок 1.

2. Постройте замкнутую ломаную линию, состоящую из трех звеньев и проходящую через четыре данные точки (рис 2).

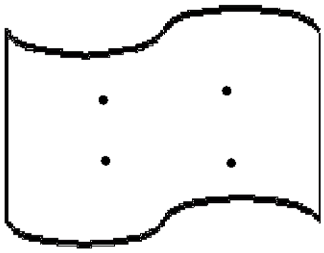


Рисунок 2.

3. Как разместить 6 кружков на плоскости так, чтобы получились 3 ряда по 3 кружка и 6 рядов по 2 кружка ?

4. Участок с четырьмя колодцами, имеющий форму равностороннего треугольника (рис 3), надо разделить на такие участки, чтобы они были одинаковы по форме, равны по площади и чтобы на каждом из них было по колодцу (изображенному на рисунке квадратом). Как это сделать ?

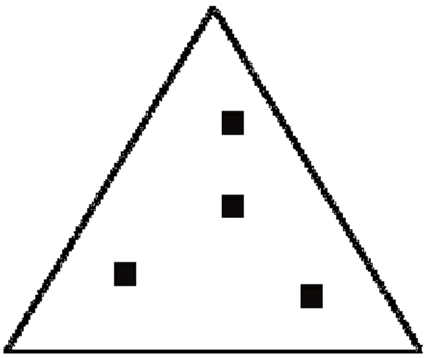


Рисунок 3.

Разрежьте правильно на части.

1. Как данный прямоугольник следует разрезать на две такие части, чтобы из них можно было сложить:
1) треугольник;
2) параллелограмм (отличный от прямоугольника);
3) трапецию ?

2. Как можно равносторонний треугольник разрезать на:
1) два равных треугольника;
2) три равных треугольника;
3) четыре равных треугольника;
4) шесть равных треугольников;
5) восемь равных треугольников;
6) двенадцать равных треугольников ?

3. Как данный прямоугольник двумя прямолинейными разрезами разбить на два равных пятиугольника и два равных прямоугольных треугольника ?

4. Сколько нужно сделать разрезов плоскостями так, чтобы из куба с ребром в 3 дм получить кубики с ребром в 1 дм ?

5. Дан треугольник ABC. Как следует разрезать его на части так, чтобы из них (не переворачивая обратной стороной) можно было сложить треугольник, симметричный данному относительно основания AC ?

6. Как разрезать на две части прямоугольник со сторонами 16 и 9 см так, чтобы из них можно было сложить квадрат ? (разрез может быть в виде ломаной линии).

Площади.

1. Дан квадрат. Постройте квадрат, площадь которого была бы в 5 раз больше площади данного квадрат.

2. Боковая сторона CD трапеции ABCD имеет длину a, а расстояние от середины AB до CD равно b. Выразите площадь этой трапеции через a и b.

3. Дан треугольник, площадь которого равна 1. Найдите площадь треугольника, образованного медианами данного треугольника.

4. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению длин его наибольшей и наименьшей диагоналей.

5. Дан выпуклый четырехугольник ABCD. Какое множество точек образуют все такие точки O, для которых площади четырехугольников OBCD и OBAD равны ?

Восстановите.

1. Постройте квадрат по двум точкам, принадлежащим противоположным сторонам его, и центру симметрии.

2. Даны три вершины A, B и C равнобедренной трапеции ABCD. Достройте трапецию. Сколько решений имеет эта задача ?

3. Восстановите квадрат по четырем точкам его, лежащим по одной на каждой стороне.

4. Постройте квадрат по двум точкам, принадлежащим смежным сторонам его и точке пересечения диагоналей.

5. Восстановите равнобедренный треугольник по основаниям его биссектрис.

6. Дана прямая и две точки, лежащие по одну сторону от нее. Постройте треугольник так, чтобы одна сторона его лежала на данной прямой, а данные точки служили бы основаниями его высот.

7. Восстановите треугольник по его основанию и точке пересечения высот.

Геометрическая викторина.

1. Высота данного треугольника не пересекаются. Какой это треугольник?

2. Могут ли быть перпендикулярными радиус и хорда, проведенные из одной и той же точки окружности ?

3. Могут ли биссектрисы двух углов треугольника быть взаимно перпендикулярными ? А медианы ? А высота ?

4. Может ли средняя линия трапеции пройти через точку пересечения диагоналей этой трапеции ?

5. В выпуклом шестиугольнике три внутренних угла прямые. Сколько среди остальных углов его острых ?

6. Можно ли какой-нибудь треугольник разрезать на два остроугольных треугольника ?

7. Можно ли какой-нибудь разносторонний треугольник разрезать на два равных треугольника ?

8. Какой четырехугольник имеет лишь:

1) одну ось симметрии;
2) центр симметрии;
3) центр и две оси симметрии;
4) центр и четыре оси симметрии.

9. Из одной точки окружности проведены две хорды. Сколько получилось сегментов ?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В современных условиях олимпиады по математике, является одной из ключевых форм внеклассной работы, служат мощным фактором и резервом формирования у школьников познавательного интереса и способностей к математике. Анализ развития математических олимпиад позволил сделать вывод о том, что в нем произошли существенные изменения, которые требуют новых подходов к совершенствованию методики подготовки и проведения математических олимпиад.

Были определены психолого-педагогические особенности развития познавательного интереса и способностей учащихся при участии в математических олимпиадах и кружках. Исследования психологов и педагогов показали, что интерес к предмету и математические способности можно и нужно развивать как можно раньше. Некоторые компоненты математических способностей формируются уже в начальных классах. В работе показано, что интерес и способности к математике особенно активно развиваются при решении творческих, нестандартных задач. Выявлено, что большое значение в развитии способностей учащихся имеет организация и проведение математических олимпиад, которые должны носить разнообразный, систематический характер. Исходя, из особенностей развития познавательного интереса и математических способностей у учащихся обоснована целесообразность выбора олимпиадных задач на кружковых занятиях как основного звена в подготовке к олимпиадам.

Совершенствование подготовки учащихся к математическим олимпиадам может быть осуществлено по трем основным направлениям: работа математического кружка, подготовка и проведение школьных математических олимпиад, использование в процессе подготовки к олимпиадам средств ИКТ. Реализация этих направлений проводится на основе разработанных требований: систематическое проведение занятий математического кружка при активном привлечении учащихся к ним, доступность обучения решению олимпиадных задач; регулярное проведение школьных математических олимпиад на основе мотивированного содержания и разнообразных форм организации; использование в процессе подготовки и проведения олимпиад средств ИКТ с целью предоставления учащимся возможности соревноваться в масштабе, выходящем за рамки школы, повышение квалификации учителей математики, укрепление контактов учителей и учеников разных школ.

А также были разработаны методические подходы в обучении решению олимпиадных задач, наиболее полно развивающие интерес и способности учащихся. В основу ведения математического кружка положено обучение учащихся поэтапному решению опорных, аналогичных и развивающих задач. На основе анализа существующей учебно-методической литературы и практики разработана система таких задач. При этом содержание задач соответствует программам по математике. Приведены примеры и сформулированы условия отбора олимпиадных задач.

Разработаны организационные формы и методы при подготовки к олимпиадам для учащихся общеобразовательных школ.

Опытно-экспериментальная работа показала, что предложенные методические подходы способствуют развитию интереса к предмету, математических способностей и активности учащихся, повышают качество знаний. Применяя эти методы и формы работы при подготовке к олимпиадам, я получила результаты, мои ученики стали призерами районной олимпиады по математике.

В заключение хочу сформулировать рекомендации учителям, работающим над подготовкой к олимпиадам одаренных детей (при условии предварительной психологической диагностики по выявлению одаренности по данному предмету):

- Необходимо усиливать теоретическую подготовку одаренных детей;
- При подготовке уделять особое внимание геометрическим нестандартным задачам, способу доказательства от противного и смешанным задачам (комбинаторика и теория чисел и др.);
- Усилить изучение внепрограммного материала: теория чисел и логические задачи;
- Обращать внимание на специфику решения задач с параметрами и на интеграцию геометрии и комбинаторики;
- Создавать индивидуальные траектории подготовки к олимпиадам (в том числе с использованием ИКТ);
- Готовить задачи с измененным условием;
- Развивать мышление одаренных детей в направлении культуры алгоритмизации и пространственного мышления, т.к. такой тип мышления довольно часто не характерен для одаренных детей;
- Формировать навыки исследования;
- Использовать склонность одаренных детей к самообучению.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балаян Э. Н. 1001 олимпиадная и занимательные задачи по математике. – 3-е изд. – Ростов н/Д: Феникс, 2008.
2. Балаян Э. Н. Готовимся к олимпиадам по математике. 5 – 11 классы. – Ростов н/Д: Феникс, 2009.
3. Березин В. Н. Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике. – М.: Просвещение, 1985.
4. Васильев Н. Б. Заочные математические олимпиады. – 2-е изд., перераб. - М.: Наука, 1987.
5. Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1986.
6. Нагибин Ф. Ф., Канин Е. С. Математическая шкатулка: Пособие для учащихся. – 4-е изд. перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1984.
7. Пичурин Л. Ф. За страницами учебника алгебры. – М.: Просвещение, 1990.
8. Сост А. А. Леман. Сборник задач московских математических олимпиад. – М.: Просвещение, 1985.
9. Тригг У. Задачи с изюминкой. – М.: Мир, 1975.
10. Фарков А. В. Математические олимпиады в школе. 5 – 11 классы. – 8-е изд., испр. и доп. – М.: Айрис-пресс, 2009.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Ответы и указания к задачам.

Без карандаша и бумаги.

1. Перепишите сумму в таком виде:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{9}{10}$$

Числовые головоломки.

1. Например: 22 + 2 + 2 + 2.
2. Например: $\frac{222}{2}$.
3. $10^{20} = 10^{10} \cdot 10^{10} > 10^{10} \cdot 2^{10}$.
4. $100^{20} = 100^{10} \cdot 100^{10} \cdot 100^{10} > 90^{10} \cdot 100^{10} = 9000^{10}$.
5. Если к искомому числу прибавить 1, то оно будет делится без остатка на 2, на 3, На 4, на 5, на 6. Наименьшее такое число $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 60$. Искомое число 60.

Некоторые старинные задачи.

1. За 35 дней.
2. За 12 ч вол съест 12 копен, конь – 6, коза – 4, всего 22 копны. Поэтому одну копну вол, конь и коза вместе съедят за $\frac{6}{11}$ ч.
3. За 12 лет четыре плотника вместе могут построить 25 дворов, а один двор они построят за $\frac{365 \cdot 12}{25} = 175\frac{1}{5}$ дня.

Решение задач с конца.

1. 7 дынь.
2. 9; 4; 2 и 1.
3. 27.
4. 21 тенге.

Переливания.

1. Можно. Сначала нужно отметить 2 л в трехлитровый сосуд.
2. Следует в сосуд, емкость которого 4 л набрать 1 л жидкости.
4. Необходимо, чтобы в одном сосуде оказался 1 л воды.

Знаете ли вы проценты ?

1. 31,5%.
2. 83,6%; 16,4%.
3. На 21%.
4. На 32%.
5. На 72,8%.

6. Уменьшится на 9%.

Арифметическая викторина.

1. Сумма двух последовательных чисел может быть простым числам, в остальных случаях – составное число.
2. 3.
3. а) 6; б) 3; в) 3.
4. Не делится.

В мире чисел.

1. 10100000_2.
2. 101011111_2.
3. 11113_5.
4. 1011001_2.
5. 12313_5.
6. 22117_8.
7. 16303_8.
8. 2222_3.
9. частное – 1101_3 остаток 22_3.

Разные задачи (арифметическая смесь).

1. 88 + 8 + 8 + 8 + 888.
4. 1-е взвешивание – 4,5 кг и 4,5 кг крупы; 2-е взвешивание – 2,25 кг и 2,25 кг; 3-е взвешивание – 2 кг крупы и гирь на 250 гр на одной чашке, на другой – 2,25 кг крупы.
5. Не делится.
6. Не может. Если бы сумма $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ оканчивалась цифрой 7, то $k(k + 1)$ оканчивалась бы цифрой 4. Но $k(k + 1)$ может оканчиваться лишь цифрами 0,2 и 6.
7. Произведение двух натуральных чисел, сумма которых меньше 13, будет наибольшим, когда каждое из этих чисел равно 6.
8. $2^{2^{22}}$.
9. 1 кг; 3 кг; 9 кг; 27 кг.
10. 1) $\frac{22}{35} = \frac{110}{175} > \frac{110}{177}$; 2) $\frac{1983}{1984} < \frac{1984}{1985}$.
11. 1794 цифры.
12. 3 кг.
13. a^{n-1}.
14. Обозначив $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = k$, имеет: $a = bk$, $b = ck$, $c = ak$, т.е. $abc = k^3abc$. Поэтому $k = 1$ и $a = b = c$.

15. Степени чисел, оканчивающихся цифрой 3, имеют окончания 3; 9; 7; 1 степени чисел с цифрой 7 имеют окончания 7; 9; 3; 1. 1999 = 1996 + 3 = 4 · 466 + 3. 1997 = 4 · 466 + 1. Обе данные степени имеют цифру единиц 7, поэтому их разность кратна 5.

Учитесь правильно рассуждать: «Не», «И», «Или», «Следует», «Равносильно».

1. Верны высказывания: 1); 2); 3); 4) б и в.
Неверны высказывания: 4) а и г; 5).
2. 1) ложно; 2) и 3) истинны.

Верные и неверные высказывания.

1. Верны утверждения: 6); 7); 8); 10); 14); 16); 17).
Неверны утверждения: 1); 2); 3); 4); 5); 9); 11); 12); 13); 15).

Необходимые и достаточные условия.

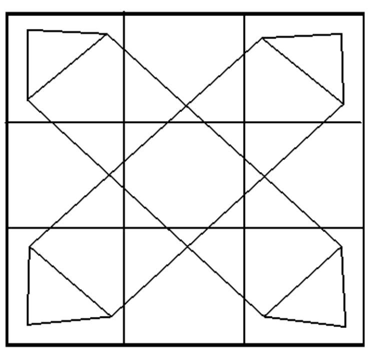
1. Достаточно: 1); 3); 6); 8); 10); 12); 15).
Необходимо: 2); 5); 9); 11).
Необходимо и достаточно: 4); 7); 13); 14); 16).

Некоторые теоремы и вопросы.

1. Произведение – четное число.
2. Неверно.

Затруднительные положения.

1. Гири по 2 гр, 13 гр, 19 гр и 60 кг.
2. Нужно выдать 2 ящика по 16 кг и 4 ящика по 17 кг (16 · 2 + 17 · 4 = 100).
3. Длина контура должна быть в 6 спичек, а ширина в 5 спичек.
5. Измерить диагональ основания кирпича, построить прямоугольный треугольник (для построения прямого угла можно воспользоваться тем же кирпичом) с катетами, длины которых равны длинам измеренной диагонали и толщины кирпича. Останется измерить длину гипотенузы этого треугольника.
6. Кузнец разделил 3 звена одного обрывка цепи. Этими звеньями соединил затем оставшиеся 4 обрывка в одну цепь.
7. Требуемую развертку можно вырезать так, как показано на рисунке.



Математические софизмы.

1. нельзя делить на $7 + 2 - 9 = 0$.
2. $(a - d)^2 = (b - d)^2 \iff |a-d| = |b-d|$.
3. $(m - n)^2 = (n - m)^2 \iff |m-n| = |n-m|$.
5. Нельзя делить на $a - a = 0$.
6. $(+a)^2 = a^2 \iff |+a| = |-a|$.
7. Формула $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ выводится на основании теоремы Пифагора, и поэтому в рассуждении получается порочный круг.
8. Деление на $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ недопустимо, так как $x = y$, и поэтому $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$.

Где ошибка ?

1. Верно решение у первого ученика. Второй ученик при возведении в квадрат обеих частей уравнения приобрел посторонний корень $x = 6$, поэтому его решения следует заверить проверкой корней.
2. Верно вычислял второй ученик. Ошибка первого ученика $\sqrt{(1-n)^2} \neq 1 - n$, так как $n = 3 > 1$, то $\sqrt{(1-n)^2} = n - 1$.
3. $\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2 \neq \sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)^2}$. По определению квадратного корня, $\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2 = -\frac{c}{a}$ $\left(\text{при } \frac{c}{a} \leq 0\right)$.

Задачи на планирование.

1. 3 мин.
2. Если при первом измерении масса груза оказалась равной p гр, а при втором q гр, то верная масса равна $\sqrt{pq}$.
3. Хозяйка отвесила более 2 кг. Пусть a – действительная масса крупы, отвешенной в первый раз и b – во второй. По предшествующей задаче $\sqrt{ab} = 1$. Имеем: $a \neq b$ и $a + b = \frac{a}{\sqrt{ab}} + \frac{b}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}} > 2$.

4. Лента намотается спиралеобразно. Для расчетов, с достаточной для практики точностью, можно считать, что получается несколько концентрических цилиндрических слоев. При расчете длины каждого такого кольца можно исходить из длины средней окружности его. Тогда колец будет $\frac{130-30}{2 \cdot 0{,}25} = 200$, диаметр средней окружности первого (наименьшего) кольца равен $30 + 2 \cdot \frac{0{,}25}{2} = 30{,}25$ мм, диаметр средней окружности второго кольца будет 30,75 мм (увеличится на 0,5 мм) и так далее. Диаметр средней окружности последнего кольца 129,75 мм. Длины всех этих окружностей составляют арифметическую прогрессию: $\pi \cdot 30{,}25$; $\pi \cdot 30{,}75$; $\pi \cdot 31{,}25$; $\pi \cdot 129{,}25$; $\pi \cdot 129{,}75$. Сумма их равна $l = \pi \cdot 16000 \approx 50250$ (мм). Значит, лента должна иметь длину 50 м 25 см.

Сообразите.

1. Через $65\frac{5}{11}$ мин.
2. 80 см.
3. 20 коров.
7. 1) -4; 2) 0; 3) 0.
8. $\frac{32}{1-a^{32}}$.
10. 81^{10}. Представить 80 = 81 – 1, а 82 = 81 – 1, затем раскрыть скобки и привести подобные члены.
11. $x^x + x^{1-x} = x + 1 \iff x^{2x} - xx^x + x - x^x = 0 \iff (x^x - 1)(x^x - x) = 0 \iff x = 1$.
12. В 5 и 7 классы.

Докажите.

1. $m^3 - m = m(m + 1)(m - 1) = (m - 1)m(m + 1)$. Одно или даже два из этих чисел четные и одно обязательно кратно 3.
2. $m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$. При нечетном m это произведение двух последовательных четных чисел, оно кратно 8.
3. $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$. Далее решение аналогично тому, как в задаче 2.
4. $n^5 - n = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$. Произведение $(n - 1)n(n + 1)$ делится на 2, на 3 и, следовательно, на 6; $n^5 - n$ делится на 5 и при $n = 5k$, $n = 5k + 1$, $n = 5k + 2$, $n = 5k + 3$, $n = 5k + 4$, что устанавливается подстановкой.
5. $a^4 - 1 = (a^2 + 1)(a - 1)(a + 1)$; $a - 1$ делится на 5 при $a = 5n + 1$; $a^2 + 1$ при $a = 5n + 2$ и при $a = 5n + 3$; $a + 1$ делится при $a = 5n + 4$.
6. $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \ldots + 7^n = (7(1 + 7 + 7^2 + 7^3) + 7^5(1 + 7 + 7^2 + 7^3) + \ldots + 7^{4n-3}(1 + 7 + 7^2 + 7^3)) = 400(7 + 7^5 + 7^9 + \ldots + 7^{4n-3})$.
7. Возможные последние цифры чисел a^8, b^8 и c^8 при $a, b, c \in \mathrm{N}$ – 1,5 и 6. Сумма никакой комбинации трех таких цифр не равна 9.
8. $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n) = ((n + 1)^2 + 1) \cdot ((n - 1)^2 + 1)$.
9. $2a^2 + 2b^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = (a + b)^2 + (a - b)^2$.
10. $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 2x + 1 = x^4 - 2x^3 + x^2 + x^2 + 2x + 1 + 4x^2 = x^2(x - 1)^2 + (x + 1)^2 + (2x)^2$.
11. $3a^4 + 1 = (a^4 - 2a^3 + a^2) + (a^4 - 2a^3 + a^2) + (a^4 - 2a^2 + 1) = (a^2 + a)^2 + (a^2 - a)^2 + (a^2 - 1)^2$.
12. Сгруппируйте все равные числа, получите единиц двоек и т.д.
13. Левую часть неравенства обозначим буквой А.

$\mathrm{A}^2 = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \ldots \cdot \frac{9999^2}{10000^2} < \frac{1}{2^2-1^2} \cdot \frac{3^2}{4^2-1^2} \cdot \frac{5^2}{6^2-1^2} \cdot \ldots \cdot \frac{9999^2}{10000^2-1^2} = \frac{1}{1\cdot 3} \cdot \frac{3^2}{3\cdot 5} \cdot$

$\frac{5^2}{5\cdot 7} \cdot \ldots \cdot \frac{9999}{10001\cdot 9999} = \frac{1}{10001} < \frac{1}{10000}$. Следовательно, A < 0,01.

14. 1) Известно, что $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ при $a \geq 0$ и $b \geq 0$. Имеем: $a + b \geq \sqrt{ab}$; $b + c \geq 2\sqrt{bc}$; $a + c \geq 2\sqrt{ac}$. Перемножим почленно полученные неравенства, находим искомое.

2) $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)$. Далее воспользуемся неравенством $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

3) $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(y^2 + z^2) + \frac{1}{2}(z^2 + x^2)$. Затем применить неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

4) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x(y + 1) + (y + 1)^2 - (y + 1)^2 + 2y^2 + 3 = (x - y - 1)^2 + y^2 - 2y + 1 + 1= (x - y - 1)^2 + (y - 1)^2 + 1 > 0$.

5) Раскрыв скобки, сгруппируйте слагаемые в левой части неравенства и воспользуйтесь тем же неравенством.

6) $\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3=\frac{3}{8}(a+b)(a-b)^2 \geq 0$.

Задачи на восстановление.

1. $k = -\frac{2}{3}$.
2. 1) $k = 1\frac{2}{3}$; 2) $k < 1\frac{2}{3}$.
3. $2(x - 1)(x + 2)(x + 3) + 8 = 2x + 8x^2 + 2x - 4$.
4. $x^2 + 3x + 1$.

Неопределенные уравнения.

1. 98.
2. 4 отрезка по 7 см и 6 отрезков по 12 см.
3. Павел. Семен поймал 21 рыбу, Павел и Игорь по 7.
4. 60.
6. Уравнение преобразуется к виду $x^2(a - b) - x(a - b)(a + b) = 0$, т.е. при $a = b$ корнем его является любое действительное число, а при $a \neq b$ корни уравнения $x = 0$ и $x = a + b$. Поэтому уравнение имеет единственный корень при $a + b = 0$, т.е. $x = 0$.

Геометрические задачи на вычисление, доказательство, построения с препятствиями и ограничениями.

1. Задача имеет 3 решения:

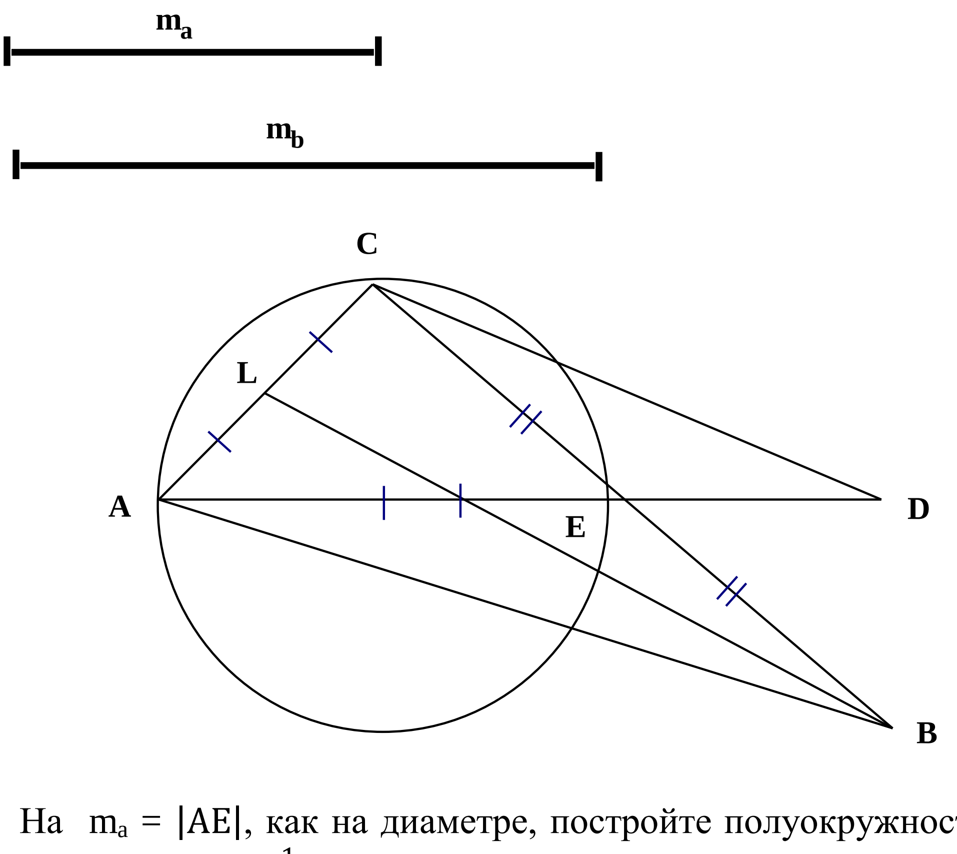
1) $80^0, 140^0, 40^0, 100^0$; 2) $40^0, 160^0, 20^0, 140^0$;

3) $29^030'$, 140^0, $150^030'$, 40^0 это решение может быть найдено графически (с помощью построений) или с помощью тригонометрии.

2. Нет.

4. Можно воспользоваться поворотом данного треугольника вокруг, например, вершины А на 60^0. Пусть таким способом получена точка M′ из тоски M, тогда Δ M′MB искомый, так как $|M'M| = |AM|$, $|M'B| = |CM|$.

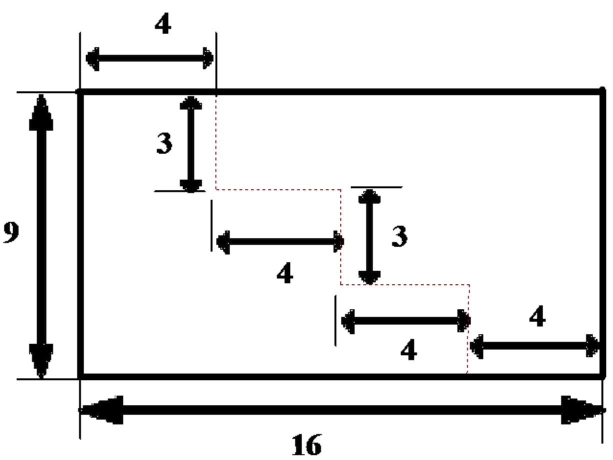
5. Пусть a, b – длины катетов и c – длина гипотенузы. Имеем: $c > a$ и $c > b$. Отсюда: $ca^2 > aa^2$ и $cb^2 > bb^2$ после сложения: $(a^2 + b^2)c > a^3 + b^3$ или $c^3 > a^3 + b^3$.
6. Пусть $A_1, A_2, A_3, \ldots A_k$ - левые концы данных отрезков, а $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k$ – правые. Любая точка A_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, k$) лежит левее любой точки B_j ($j = 1, 2, 3, \ldots, k$) или совпадает с ней (в противном случае A_jB_j и A_iB_i не имели бы общих точек). Возьмем из точек A_j самую правую, а из B_j – самую левую. Получим отрезок (или точку в случае совпадения взятых точек), содержащихся в каждом из данных отрезков.
8. Дополнением данного угла до 90^0 служит угол 36^0. Это дополнение следует разделить на 2 равных угла, каждый из которых составляет $\frac{1}{3}$ данного угла.
9. $a = \frac{1}{2}((a + b) + (b + c) + (c + a)) - (b + c)$.
10. Сначала построим треугольник по гипотенузе, равной данной диагонали, и катету, равному высоте. Поэтому треугольнику построим искомый ромб.
11. Пусть R – радиус данной окружности, x – радиус искомой окружности и O, O_1, O_2 – соответственно центры данной полуокружности, одной из построенных равных и искомой окружности. Тогда $|O_1O_2|^2 = |O_1O|^2 + |O_2O|^2$ или $\left(\frac{R}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R - x)^2$ откуда $x = \frac{R}{3}$.
12.

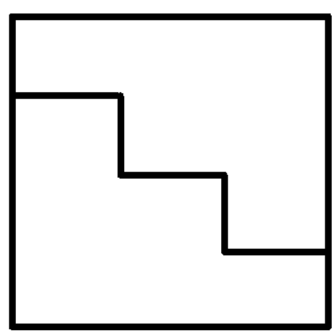


На $m_a = |AE|$, как на диаметре, постройте полуокружность. Продолжите m_a так, чтобы $|ED| = \frac{1}{3}$ m_a. проведите дуги окружности с центром в точке D и радиусом $\frac{2}{3}$ m_b. Точка C пересечения дуги с полуокружностью является

вершиной прямого угла искомого треугольника. По ней может быть построен искомый ΔABC.
13. Можно воспользоваться симметрией относительно прямой АВ.
14. Можно воспользоваться осевой симметрией, пересечения высот треугольника в одной точке, пересечением диагоналей параллелограмма и другими свойствами фигур.
15. Постройте A_1C_1 расстояние между которыми равно $|AC|$. Из точки A_1 радиусом $|AB|$ постройте дугу и из точки C_1, радиусом $|CB|$ - вторую дугу. Точка пересечение этих дуг и будет искомой точкой B_1.
16. С центрами в точках А и В построите две пересекающиеся дуги одного и того же радиуса. Далее, в точках пересечения этих дуг, С и D проведите прямую и отметьте точку.
17. Воспользуйтесь построением вершин примыкающих последовательно друг к другу равносторонних треугольников со стороной АВ.
18. Сначала постройте угол в 60^0. Разделив его пополам, получите угол в 30^0. Далее построив угол в $60^0 + 30^0 = 90^0$.

Разрежьте правильно на части.
5. Сначала разрежьте на два прямоугольных треугольника.
6.





Площади.
1. Пусть a – длина стороны данного квадрата. Длина стороны искомого квадрата равна длине гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами a и $2a$.
2. ab.
3. $\frac{3}{4}$ кв единицы.
4. Найдите площадь одного из четырех равных четырехугольников, составляющих данный восьмиугольник.

Восстановите.

1. Воспользуйтесь центральной симметрией.
2. Каждый из отрезков AB, AC и BC примите за основание и достройте трапецию, если это окажется возможным. Число решений зависит от расположения точек A, B и C.
3. Пусть M, N, P и Q - данные точки (принадлежат смежным сторонам квадрата). Постройте отрезок NQ, затем MP = NQ и MR $\perp$ NQ, пересекающий прямую NQ. Одна из сторон искомого квадрата лежит на PR. Дальнейшее очевидно.
4. Пусть M и N – данные точки смежных сторон квадрата. На MN, как на диаметре, постройте окружность. Найдите середину K той полуокружности, которая опирается на MN и лежит с той же стороны, что и данная точка O. На OK лежит диагональ искомого квадрата. О дальнейшем вы догадайтесь.
5. Основания биссектрис – вершины вспомогательного равнобедренного треугольника с основанием DE и вершиной F. Через F проведите прямую, параллельную DE. На этой прямой лежат концы основания искомого треугольника. Кроме того, от точек DE и они отстоят на расстояниях, равных DE.
6. Найдите точку пересечения O с данной прямой серединного перпендикуляра к AB, концами которого служат данные точки, и опишите окружность из точки O, как центра, радиусом $|OA|$. Точки пересечения этой окружности с данной прямой и будут концами основания искомого треугольника.
7. Пусть основание искомого треугольника AC и O – точкам пересечения его высот. Постройте AO и CO и перпендикулярные им соответственно лучи с началами в точках C и A – это будут стороны искомого треугольника.

Геометрическая викторина.

1. Тупоугольный.
2. Нет.
3. Биссектрисы нет, высоты и медианы – да.
4. Не может.
5. Все остальные острые, и сумма их равна 90^0.
6. Нельзя.
7. Нельзя.
8. 1) Дельтоид (четырехугольник, составленный из равнобедренных (неравных треугольников, приложенных один к другому равными основаниями)); равнобокая трапеция.
2) Параллелограмм, отличный от прямоугольника и ромба.
3) Прямоугольник или ромб, отличный от квадрата.
4) Квадрат.
9. 4.

Приложение 2

Список ресурсов ИКТ для подготовки к олимпиадам по математике (в помощь педагогам и родителям)

1. http://www.mat.1september.ru - Газета «Математика» Издательского дома «Первое сентября».
2. http://www.math.ru - Math.ru: Математика и образование.
3. http://www.allmath.ru - Allmath.ru — вся математика в одном месте.
4. http://www.eqworld.ipmnet.ru - EqWorld: Мир математических уравнений.
5. http://www.exponenta.ru - Exponenta.ru: образовательный математический сайт.
6. http://www.bymath.net - Вся элементарная математика: Средняя математическая интернет-школа.
7. http://www.neive.by.ru - Геометрический портал.
8. http://www.graphfunk.narod.ru - Графики функций.
9. http://www.rain.ifmo.ru/cat - Дискретная математика: алгоритмы (проект Computer Algorithm Tutor).
10. http://www.zadachi.mccme.ru - Задачи по геометрии: информационно-поисковая система.
11. http://www.tasks.ceemat.ru - Задачник для подготовки к олимпиадам по математике.
12. http://www.math-on-line.com - Занимательная математика — школьникам (олимпиады, игры, конкурсы по математике).
13. http://www.problems.ru - Интернет-проект «Задачи».
14. http://www.etudes.ru - Математические этюды.
15. http://www.mathtest.ru - Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике online).
16. http://www.matematika.agava.ru - Математика для поступающих в вузы.
17. http://www.mathprog.narod.ru - Математика и программирование.
18. http://www.zaba.ru - Математические олимпиады и олимпиадные задачи.
19. http://www.kenguru.sp.ru - Международный математический конкурс «Кенгуру».
20. http://www.methmath.chat.ru - Методика преподавания математики.